

Université de Liège 


Faculté de psychologie
et des sciences de
l'éducation

PREMIÈRES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES ET UTILISATION DE SYMBOLISATIONS VARIÉES

**Partir des démarches informelles des élèves pour construire
de nouveaux apprentissages et leur donner du sens**

Groupe de contact FNRS « Recherches en didactique des sciences et
des mathématiques » – 14 octobre 2011

Annick Fagnant

Service de Didactique Générale et
Intervention Educative

 Centre Interfacultaire de
Formation des Enseignants 

PRÉAMBULE

- Moment de l'apprentissage
 - Construction des concepts d'addition et de soustraction et des symbolisations liées
- Lignée des courants socioconstructivistes
 - Co-construction des concepts et des symboles (Cobb, Yackle & McClain, 2000 ; Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2002)
- Quelles activités de symbolisations ?
 - Toute situation dans laquelle une **entité** (telle qu'une trace sur papier ou un arrangement d'objets physiques) peut être interprétée comme remplaçant ou signifiant quelque-chose d'autre (Cobb, 2000)

PLAN DE LA PRÉSENTATION

I. Contexte

- Enquête par questionnaire

II. Quelle utilisation des symbolisations ?

- Deux études menées en CF

III. Des problèmes pour donner du sens aux symbolisations formelles ?

- Deux pistes didactiques

IV. Pour terminer sans conclure

- Recadrage théorique et élargissement → l'utilisation de symbolisations pour construire du sens



I. CONTEXTE

Analyse des manuels les plus fréquents

Enquête ⇔ 120 enseignants du primaire (CF)

- Les élèves rencontrent précocement une multitude de symbolisations pour représenter les opérations
- Les problèmes ont essentiellement une fonction d'application



Source – Fagnant &
Hindryckx (2005, 2006)

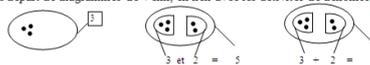
Une multitude de symbolisations pour introduire et représenter les opérations

Les opérations sont généralement **introduites** au départ...

- de diagrammes de Venn (plus de 30%)

3.2. Après un travail sur le **concept** d'addition dans des **situations variées** (des jeux, des manipulations, etc.), **comment le calcul** (ex. $3+2=5$) est-il introduit **pour la toute première fois** ? Cochez **une seule** proposition.

- Au départ de diagrammes de Venn, en lien avec les activités de dénombrement



- Au départ de jeux et de manipulations avec du matériel Cuisenaire : construction de trains en accrochant des wagons (le = est l'accroche du train)

- Au départ de situations racontées oralement (ex. Pierre a 3 bonbons. Anne en a 2. Combien en ont-ils en tout ?)

- Au départ d'opérateurs



- Au départ de dessins représentant des histoires à interpréter (ex. Trois garçons jouent, deux autres arrivent ... - Il y a 3 pommes sur un arbre et 2 au sol, ...)

- Au départ de l'étude d'un nombre et de sa décomposition



- mais aussi de jeux avec du matériel Cuisenaire, de décompositions, d'histoire racontées ou dessinées,...

Elles sont **proposées** le plus fréquemment au départ...

- de décompositions additives (1er choix pour 62%)
- de diagrammes de Venn, de calculs, de graphes fléchés
- de problèmes (5e choix le plus fréquent – 45%)

Les problèmes ont essentiellement une fonction d'application

- Environ un tiers \Leftrightarrow début d'année
 - Appuyer apprentissage des opérations sur problèmes
- Environ 20% après Noël, 20% fin d'année, 20% année ou cycle suivant
 - Certains pré-requis sont jugés nécessaires

5.3. Voici des exemples issus du programme (pp. 267-269)

- Pierre a 6 autocollants. Pol en a 5. Combien en ont-ils ensemble ?
- Pierre a 6 euros. Pol en a 5. Combien Pierre a-t-il d'euros de plus que Pol ?
- Pol avait 7 images. Il en donne à Pierre. Maintenant, Pol en a 5. Combien Pol a-t-il donné d'images à Pierre ?

Quand développez-vous des séquences d'enseignement basées sur ce type de problèmes ?

L'objectif « **appliquer les opérations formelles apprises en classe** » est davantage retenu que celui de « **développer la compréhension des opérations** »

II. QUELLE UTILISATION DES SYMBOLISATIONS?

Deux études menées en CF

Résoudre des problèmes en disposant de matériel manipulable, puis...

- (études 1 et 2) **produire** sur papier des symbolisations liées à l'histoire et/ou à la stratégie de résolution
- (étude 2) **utiliser** différentes symbolisations prédéfinies



Méthodologie de l'étude 1

- 25 élèves de 1P
- Interviews individuelles (en janvier et en juin)
- 14 problèmes de la classification de Riley et al.
- Résoudre le problème et produire un calcul

Combinaison	Changement	Comparaison
<i>Pierre a 4 pommes. Anne a 9 pommes. Combien de pommes Pierre et Anne ont-ils ensemble ?</i>	<i>Pierre avait 5 bonbons. Anna a donné quelques bonbons à Pierre. Maintenant, Pierre a 11 bonbons. Combien de bonbons Anna a-t-elle donné à Pierre.</i>	<i>Pierre a 5 bonbons. Anne a 11 bonbons. Combien de bonbons Anne a-t-elle de plus que Pierre ?</i>



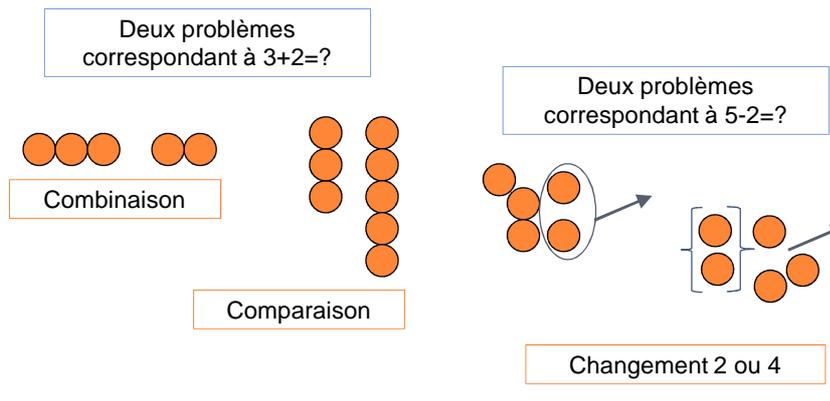
Sources – Fagnant (2002a,b, 2005a,b)

Principaux résultats de l'étude 1

Q1) Les enfants sont-ils capables de résoudre certains problèmes et quelle utilisation des symboles développent-ils?

o Utilisation de symbolisations ?

- Utilisation du matériel manipulable pour « mettre en acte » les actions ou relations (88% de stratégies de type « matériel » en janvier et 66% en juin)



o Production de symbolisations ?

- Difficulté à créer des liens entre les démarches informelles de résolution et le symbolisme mathématique formel utilisé en classe (les calculs)

	R (sur 25)	C (sur 25)	D (R-C)
Combinaison 1 - Pierre a 4 pommes. Anne a 9 pommes. Combien de pommes Pierre et Anne ont-ils ensemble ?	22	16	6
Changement 1 - Pierre avait 4 pommes. Anne a donné 9 pommes à Pierre. Combien de pommes Pierre a-t-il maintenant ?	23	17	6
Changement 2 - Pierre avait 12 cerises. Pierre a donné 7 cerises à Anne. Combien de cerises Pierre a-t-il maintenant ?	22	13	9
Changement 3 - Pierre avait 5 bonbons. Anne a donné quelques bonbons à Pierre. Maintenant, Pierre a 11 bonbons. Combien de bonbons Anne a-t-elle donnés à Pierre ?	19	13	6
Changement 5 - Pierre avait quelques livres. Anne a donné 6 livres à Pierre. Maintenant Pierre a 11 livres. Combien de livres Pierre avait-il au départ ?	18	11	7
Comparaison 1 - Pierre a 5 bonbons. Anne a 11 bonbons. Combien de bonbons Anne a-t-elle de plus que Pierre ?	12	7	5
Comparaison 3 - Pierre a 4 pommes. Anne a 9 pommes de plus que Pierre. Combien de pommes Anne a-t-elle ?	11	7	4

- **Production de symbolisations ?**

- Pour tous les problèmes → nombre de CC toujours inférieur au nombre de RC (colonne «D»).
- Pas seulement une tendance globale → aucun élève n'est parvenu à produire un calcul correct s'il n'avait pas, au préalable, résolu le problème correctement.
- Colonne « D » → difficultés de symbolisation ⇔ nombre d'élèves qui n'ont pas pu produire un calcul correct face à un problème qu'ils avaient pourtant résolu correctement (et ceci, généralement par comptage).

Q2) Quelles sont les principales difficultés propres à l'utilisation des symbolisations formelles ?

- **Difficultés propres aux symbolisations formelles**

Profil I – 3 élèves Le néant	Aucun calcul correct → aucune connexion problèmes / symboles
Profil II – 4 élèves Des additions pour des situations additives	Uniquement calculs « + » dans des situations additives (Chang. 1) ou mixtes (ex. chang. 3).
Profil III – 9 élèves Des additions pour des situat. de ttes sortes	Uniquement calculs « + » → idem que profil II + reconstructions additives dans situations soustractives (ex. $7+(5)=12$ face à chang. 2)
Profil IV – 5 élèves Add et soustr dans ttes sortes de situations	Calculs « + » et « - », mais (1) pas tjrs adaptés (reconstructions additives) et (2) pas tjrs CC (certains P sont RC mais pas CC)
Profil V – 4 élèves Add et soustr bien adaptées aux situat.	Tous les calculs bien adaptés aux situations et tous les problèmes RC sont symbolisés correctement

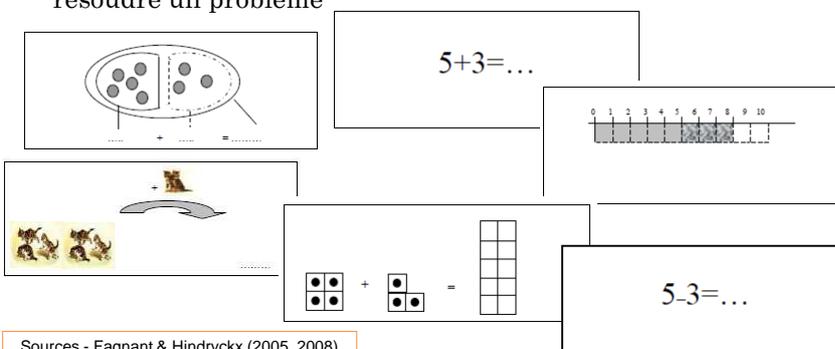
- **Peut-on considérer l'utilisation d'un symbolisme mathématique insuffisamment intégré comme un élément déclencheur de démarches superficielles ?**
- Analyser les erreurs produites au moment de la résolution et au moment de la production du calcul
 - ➔ voir si on peut les attribuer à des mécanismes différents...

Résultats (non développés ici)

- Erreurs de nature conceptuelle (résolution)
- Développement de démarches superficielles (production du calcul)

Méthodologie de l'étude 2

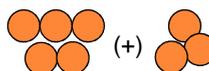
- 20 élèves de 1P
- Interviews individuelles (en novembre /décembre)
- 2 problèmes de type changement (un additif /un soustractif)
- Résoudre le problème et produire une symbolisation permettant d'expliquer la démarche
- Reconnaître différentes symbolisations et s'en servir pour résoudre un problème



Principaux résultats de l'étude 2

Q1) Les enfants sont-ils capables de produire une symbolisation permettant d'expliquer leur démarche de résolution ?

- **Production de symbolisations ?**
 - Résolution à l'aide de matériel manipulable
 - « *Tu dois expliquer à un copain comment tu as fait pour trouver la réponse. Fais-le sur la feuille* ».
 - Autrement ? Puis,... un calcul ?
- 8 élèves ⇔ au moins 2 symbolisations correctes (dessin + calcul)
- 1 élève ⇔ un dessin correct (aucun calcul)
- 7 élèves ⇔ un calcul correct (aucun dessin)
- 4 élèves ⇔ aucun symbolisation correcte



$$5 + 3 = 8$$



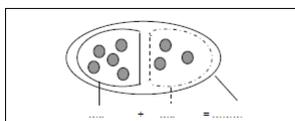
$$5 + 3 = 5$$

Attention ⇔ nombres plus petits que dans étude 1 et P les deux plus faciles

Q2) Les enfants sont-ils capables de reconnaître différentes symbolisations d'une opération et de les utiliser pour résoudre un problème ?

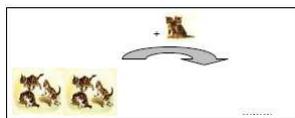
Cinq chats jouent dans le jardin. Trois autres chats viennent jouer avec eux. Combien y a-t-il de chats maintenant ?

Les cartes les plus choisies...



$$5+3=...$$

L'erreur la plus courante
⇔ focalisation sur le résultat



Une confusion importante au niveau des calculs... ⇔ seule la moitié des élèves ne choisit que $5+3=...$

$$5-3=...$$

$$8-5=3$$

$$8+3=...$$

$$8-3=...$$

→ Vers démarches superficielles de RP ?

En synthèse des études 1&2

- Les élèves ont des compétences importantes en résolution de problèmes (stratégies informelles de résolution)
- Les élèves utilisent spontanément du matériel (symboles) pour résoudre des problèmes
- Les élèves sont confrontés précocement à une multitude de symbolisations pour représenter les opérations MAIS ils éprouvent d'importantes difficultés à utiliser celles-ci
- Les jeunes élèves ont peu tendance à développer des stratégies superficielles face aux problèmes alors que l'on rencontre souvent ce type de stratégies chez les élèves plus âgés → une utilisation mal intégrée des symboles mathématiques pourrait favoriser ce type de démarche



III. DES PROBLÈMES POUR DONNER DU SENS AUX SYMBOLISATIONS FORMELLES ?

Deux pistes didactiques

- chacune testée dans une classe de 1P (10 séances, de févr. à juin)
- résultats comparés à des 2P « traditionnelles » (test en juin)

- **Méthode A** ⇔ méthode très ancrée dans les stratégies informelles de résolution
⇔ résolution à l'aide de matériel manipulable / dessin de la manipulation / production du calcul qui « colle » à la manip.
- **Méthode B** ⇔ méthode qui vise à faire apprendre une heuristique d'aide à la résolution de problèmes
⇔ représentation dessinée de l'histoire / production du calcul qui « colle » à l'histoire / résolution du calcul

Sources – Fagnant (2002a)



Méthode A

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10 11

$5 + \textcircled{6} = 11$

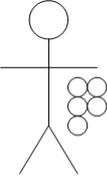
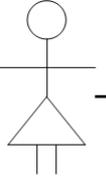
ou

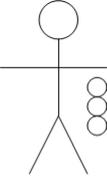
1 2 3 4 5

6 7 8 9 10 11

$11 - 5 = \textcircled{6}$

Méthode B


5
+

+

=

11

Principaux résultats de cette étude exploratoire

- Est-il possible de travailler la résolution de problèmes en 1P ?

Tableau 1 – Pourcentages de solutions présentant un calcul et une réponse corrects

	Méthode A (sur 15 élèves)			Méthode B (sur 18 élèves)		
	Prétest	Test interm	Post-test	Prétest	Test interm	Post-test
Tous les probl	24%	57%	70%	14%	37%	63%
Combinaison	44%	71%	84%	39%	50%	78%
Changement	28%	63%	71%	10%	42%	66%
Comparaison	5%	38%	55%	2%	15%	43%

- Ces approches de la RP en 1P semblent-elles plus efficaces que les approches traditionnelles (RP en 2P essentiellement) ?

Tableau 4 – Pourcentages de problèmes résolus et symbolisés correctement par les élèves des classes expérimentales et des classes témoins de première année

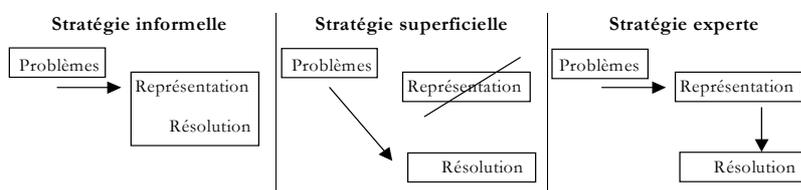
	Méth A	Méth B	Moyenne Témoins	Témoin 1	Témoin 2	Témoin 3	Témoin 4	Témoin 5
Tous les prob	70%	63%	36 %	35%	45%	34%	31%	33%
Combinaison	84%	78%	53%	54%	61%	49%	52%	53%
Changement	71%	66%	35%	33%	52%	31%	31%	37%
Comparaison	55%	43%	17%	21%	19%	23%	9%	5%

En synthèse

En s'appuyant sur ces divers constats, on a vu qu'il était possible de développer des approches didactiques qui visent à...

- ✓ donner du sens aux symboles et aux concepts en visant une co-construction de ceux-ci
- ✓ développer des démarches efficaces de résolution de problèmes (éviter les démarches superficielles)

Schémas représentant les trois types de stratégies

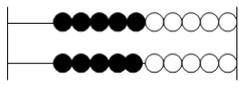


IV. POUR TERMINER SANS CONCLURE...

- **Recadrage théorique et élargissement : l'utilisation de symbolisations pour construire du sens**
- Le modèle de « chaîne de signification » de Gravemeijer
 - Co-construction des symboles et des concepts
 - Evolution des symbolisations informelles vers des symbolisations mathématiques plus conventionnelles
- L'impact des *self-generated drawings*
 - Comme aide à la résolution de problèmes (aider à structurer - voir notamment la *mathematical modeling perspective* Verschaffel et al., 2000, 2005)
 - Comme moyen de communiquer son raisonnement mathématique et de le faire évoluer (i.e. School bus – Bednarz & al., 1993)

Un exemple de « chaîne de signification »

Schéma représentant un boulier arithmétique



Boulier ⇔ modèle de la situation

Passagers du bus à double étage Billes (ou doigts) Notations non standard Notations conventionnelles	Signifié 1 ↓ Signifiant 1 ↓ Signifiant 2 ↓ Signifiant 3	Signifié 2 ↓ Signifiant 2 ↓ Signifiant 3	Signifié 3 ↓ Signifiant 3	→
---	---	--	---------------------------------	---

Boulier ⇔ modèle pour le raisonnement mathématique

Rôle d'étayage de l'enseignant

Importance des symboles pour faciliter la communication (mathematical discourse)

- Le « boulier arithmétique » et les opérations avec passage par la dizaine - Gravemeijer et al. (2000); Gravemeijer, (2002)

Matériel manipulable permettant de « jouer » l'histoire ⇔ modèle de...

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 10px; text-align: center;">Bonbons à échanger</div> Passagers du bus à double étage Billes (ou doigts) Notations non standard Notations conventionnelles	Signifié 1 ↓ Signifiant 1 ↓ Signifiant 2 ↓ Signifiant 3	Signifié 2 ↓ Signifiant 2 ↓ Signifiant 3	Signifié 3 ↓ Signifiant 3	→
---	---	--	---------------------------------	---

Dessin de la manipulation ⇔ symbolisation des opérations concrètes ⇔ modèle pour...

Rôle d'étayage de l'enseignant

Importance des symboles pour faciliter la communication (mathematical discourse)

Source – Fagnant, Vlassis & Crahay (2005); voir aussi Fagnant (2009) pour une activité relative à la décomposition du nombre

Les « *self-generated drawings* » comme aide à la résolution de problèmes ?

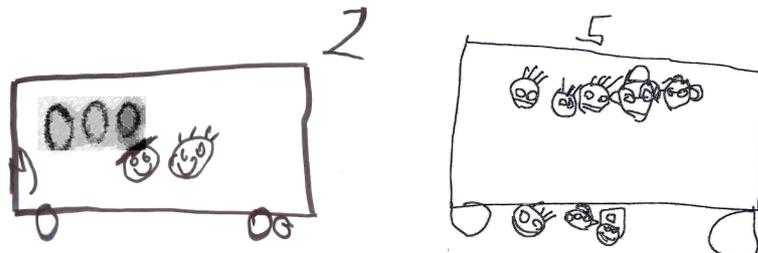
- Plusieurs études (Hegarty & Kozhenikov, 1999 ; van Garderen & Montague, 2003 ; Uesaka, Manalo & Ichikawa, 2007) montrent que la construction d'une représentation (mentale ou externalisée sur papier) est un facteur lié aux performances en résolution de problèmes
→ représentations schématiques
- Il est possible d'apprendre aux élèves à réaliser des schématisations qui peuvent les aider à structurer et à résoudre des problèmes (van Essen & Hammaker, 1990, Diezman, 2002 ; van Garderen, 2007)
→ quel type de schématisations pour soutenir le raisonnement mathématique ? (Fagnant & Vlassis 2010)



Un exemple de situation où les dessins aident à la résolution du problème et au développement du raisonnement mathématique
Bednarz et al. (1993) (voir aussi Fagnant, Hindryckx & Demonty, 2008)

Le bus scolaire

Les enfants sont amenés à symboliser pour **soutenir leur démarche de résolution** de problème, mais aussi dans le but de **communiquer**.



- Partir des démarches informelles des élèves pour co-construire le sens des concepts et des symbolisations semble porteur...
- Plusieurs recherches menées en ce sens ouvrent des voies prometteuses...

Travailler dans cette direction avec les jeunes élèves pourrait contribuer à éviter de donner l'impression que
les mathématiques consistent à « appliquer des règles en manipulant des symboles dont le sens est généralement obscur »

Merci pour votre
attention

